Lösung: Serie 5

1. Beispiel: Quotient einer freien Gruppe

Wir definieren die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}^2$$

durch $\varphi(a) = (1,0)$ und $\varphi(b) = (0,1)$. Dies ist offensichtlich ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Weiter ist $\varphi(aba^{-1}b^{-1}) = (0,0)$ und somit $aba^{-1}b^{-1} \in \ker\varphi$. Da der Kern von φ eine normale Untergruppe ist, folgt $N \subset \ker\varphi$. Folglich ist die Abbildung

$$\psi\colon (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/N \cong \langle a, b\rangle / \langle\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}^2$$

wohldefiniert und ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Es bleibt zu zeigen, dass ψ injektiv ist.
Dazu zeigen wir zuerst, dass in der Quotientengruppe die Nebenklassen $[ab]$ und $[ba]$ identisch sind, d.h. $[ab] = [ba]$. Da die Nebenklassen einer Gruppe disjunkt sind, reicht es zu zeigen, dass $[ab] \subset [ba]$. Wir haben

$$[ba] = baN = baNN = bNaN = NbaN.$$

Da $aba^{-1}b^{-1} \in N$, ist $ab = aba^{-1}b^{-1}ba \in Nba$ und somit $abN \subset NbaN = baN$. Somit ist $[ab] = [ba]$ gezeigt.
Somit ist jede Nebenklasse in $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/N$ von der Form $[a^n b^m]$ für $n, m \in \mathbb{Z}$. Die einzige Nebenklasse die auf $(0,0)$ abgebildet wird, ist also $[a^0b^0]$. Deshalb ist der Kern von ψ trivial und ψ somit injektiv.

2. Fundamentalgruppe des punktierten 2-Torus

(a) $S^1 \setminus \{x_1\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$ (siehe Lösung von Serie 4 Aufgabe 4). $\mathbb{R}$ ist jedoch einfach zusammenhängend, also gilt $\pi_1(S^1 \setminus \{x_1\}) \sim \pi_1(\mathbb{R}) = \{e\}$. Da nach Serie 4 Aufgabe 3 $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, haben wir

$$\pi_1(U) = \pi_1((S^1 \setminus \{x_1\}) \times S^1) \sim \pi_1(S^1 \setminus \{x_1\}) \times \pi_1(S^1) \sim \{e\} \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}.$$

Analog zeigt man, dass $\pi_1(V) \sim \mathbb{Z}$.
(b) Offensichtlich ist $U \cap V = (S^1 \setminus \{x_1\}) \times (S^1 \setminus \{x_2\})$ homöomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ was jedoch einfach zusammenhängend ist. Also gilt $\pi_1(U \cap V) = \{e\}$.
(c) Da $U \cup V = (S^1 \times S^1) \setminus \{x\}$, $U \cap V$ einfach zusammenhängend ist und U, V offen sind, können wir den Satz von Van Kampen anwenden,

$$\pi_1((S^1 \times S^1) \setminus \{x\}) = \pi_1(U \cup V) \sim \pi_1(U) * \pi_1(V) \sim \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

3. Fundamentalgruppe von höherdimensionalen punktierten Tori

(a) Da $V \approx (-\varepsilon, \varepsilon)^n$ ist, ist $\pi_1(V) \sim \prod_{i=1}^n \pi_1\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big) \sim \prod_{i=1}^n \{e\} \sim \{e\}$.
(b) Wir haben $U \cap V = V \setminus \{x\} \approx (-\varepsilon,\varepsilon)^n \setminus \{0\} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und letzteres ist einfach zusammenhängend da $n \geq 3$. Somit gilt

$$\pi_1(U \cap V) \sim \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \sim \{e\}.$$

(c) Nach dem Satz von Van Kampen ist

$$\begin{aligned}\pi_1\big((S^1)^n\big) &= \pi_1(U \cup V) \sim \pi_1(U) * \pi_1(V) \sim \pi_1(U) * \{e\} \sim \pi_1(U) \\ &= \pi_1\big((S^1)^n \setminus \{x\}\big).\end{aligned}$$

(d) Da $\pi_1(S^1) \sim \mathbb{Z}$ (siehe Serie 4, Aufgabe 3), haben wir

$$\pi_1\big((S^1)^n\big) \sim \prod_{i=1}^n \pi_1(S^1) \sim \mathbb{Z}^n.$$